Topologie Algébrique TD 8

13 Janvier 2012

8 Cohomologie

Exercice 8.1 Calculer les anneaux de cohomologies à coefficient dans $\mathbf{Z}$ et dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ des espaces topologiques suivants :

1. Une *étoile*[1] dans un espace vectoriel réel à centre l'origine.
2. $\mathbb{S}^n$, la sphère de dimension n.
3. Un graphe fini connexe.
4. La surface compacte orientable de genre g.
5. La bouteille de Klein.
6. $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$, l'espace projectif complexe de dimension n.
7. $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$, l'espace projectif réel de dimension n.
8. $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n}$, le tore topologique de dimension n.

Exercice 8.2 (Théorème de Coefficient Universel : version pratique) Soit X un espace topologique, on suppose que tout son groupe d'homologie à coefficient dans $\mathbf{Z}$ est un groupe abélien de type fini (par exemple, si X est un CW-complexe fini). Par la structure de groupes abéliens de type fini, on écrit :

$$H_i(X, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^{r_i} \oplus \bigoplus_j \mathbf{Z}/k_{i,j}\mathbf{Z},$$

où $k_{i,j}$ est une puissance d'un nombre premier. On introduit deux notations : pour un groupe abélien G, on définit ${}_kG := \mathrm{Ker}(G \xrightarrow{k} G)$, et $G_k := \mathrm{Coker}(G \xrightarrow{k} G)$. Montrer les résultats suivants :

1. **(Changement de coefficient d'homologie)**

$$H_i(X, G) = G^{r_i} \oplus \bigoplus_j G_{k_{i,j}} \oplus \bigoplus_j {}_{k_{i-1,j}}G.$$

2. **(Cohomologie à coefficient quelconque)**

$$H^i(X, G) = G^{r_i} \oplus \bigoplus_j {}_{k_{i,j}}G \oplus \bigoplus_j G_{k_{i-1,j}}.$$

En particulier,

$$H^i(X, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^{r_i} \oplus \bigoplus_j \mathbf{Z}/k_{i-1,j}\mathbf{Z},$$

1. Une étoile E est un sous ensemble qui vérifie la propriété : $P \in E$ implique $\overline{OP} \subset E$

3. **(Dualité de Kronecker)** Soit F un corps de caractéristique nulle.

$$H^i(X,F) = H_i(X,F)^*.$$

Exercice 8.3 (Opérations) Soient X, Y deux CW-complexes, A un sous-complexe de X. Soit F un corps de caractéristique nulle. Toutes les homologies et cohomologies suivantes sont à coefficient dans F. On va résumer les effets sur les cohomologies de certains opérations usuelles sur espaces topologiques.
Rappelons la définition de cohomologie réduite : $\widetilde{H}^i(X) := H^i(X,x)$, où x est un point de base de X, autrement-dit, $\widetilde{H}^*(X)$ est l'idéal défini par le noyau du morphisme d'augmentation $H^*(X) \twoheadrightarrow F = H^*(x)$, et $H^*(X) = F \cdot 1 \oplus \widetilde{H}^*(X)$ est l'opération canonique de 'ajouter l'unité' appliquée à F-algèbre sans unité $\widetilde{H}^*(X)$. Démontrer les isomorphismes de F-algèbres suivants :

1. **(Union disjoint)**

$$H^*(X \coprod Y) = H^*(X) \times H^*(Y)$$

En particulier, les deux facteurs sont orthogonaux par rapport au cup produit.
(Préciser d'abord la définition du produit direct de deux F-algèbres graduées.)

2. **(Produit : formule de Künneth)**

$$H^*(X \times Y) = H^*(X) \otimes_F H^*(Y).$$

En particulier, en chaque degré, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$H^n(X \times Y) = \bigoplus_{i=0}^{n} H^i(X) \otimes_F H^{n-i}(Y).$$

(Préciser la définition du produit tensoriel de deux F-algèbres graduées. Faire attention sur les signes !)

3. **(Bouquet)**

$$\widetilde{H}^*(X \vee Y) = \widetilde{H}^*(X) \times \widetilde{H}^*(Y).$$

Autrement-dit,

$$H^*(X \vee Y) = F \cdot 1 \oplus (\widetilde{H}^*(X) \times \widetilde{H}^*(Y)).$$

4. **(Produit Smash : formule de Künneth)**

$$\widetilde{H}^*(X \wedge Y) = \widetilde{H}^*(X) \otimes_F \widetilde{H}^*(Y).$$

Autrement-dit,

$$H^*(X \wedge Y) = F \cdot 1 \oplus (\widetilde{H}^*(X) \otimes_F \widetilde{H}^*(Y)).$$

En particulier, en chaque degré, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$\widetilde{H}^n(X \wedge Y) = \bigoplus_{i=0}^{n} \widetilde{H}^i(X) \otimes_F \widetilde{H}^{n-i}(Y).$$

5. **(Suspension (réduite))**

$$\widetilde{H}^*(\Sigma X) = \widetilde{H}^*(X) \cdot \epsilon,$$

où ϵ est un élément formel (non-nul) de degré 1 vérifiant $\epsilon^2 = 0$. Autrement-dit, $H^0(\Sigma X) = F \cdot 1$, $H^i(\Sigma X) = H^{i-1}(X)$ pour $i \geq 1$, et tous les cup-produits entre les éléments de degrés au moins 1 s'annulent.

6. **(Quotient)**
$$H^*(X, A) = \widetilde{H}^*(X/A) = \widetilde{H}^*(X \cup_A CA)$$

Exercice 8.4 (Produit) Calculer l'anneau de cohomologie à coefficient dans $\mathbf{Z}$ et dans $\mathbf{Z}/2$ de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}} \times \mathbf{P}^m_{\mathbf{R}}$.

Exercice 8.5 (Morphisme de Bockstein) Soit p un nombre premier. On considère la suite exacte courte suivante :

$$0 \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to 0,$$

où le premier morphisme envoie une classe $i \bmod p$ vers la classe $pi \bmod p^2$, et le deuxième morphisme est simplement la projection naturelle. Soit X un espace topologique, et $C^\bullet$ son complexe des cochaines singulières.

1. Montrer qu'on obtient une suite exacte courte de complexes :

$$0 \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \otimes C^\bullet \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z} \otimes C^\bullet \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \otimes C^\bullet \to 0.$$

2. En déduire pour chaque entier positif i, un morphisme $\beta : H^i(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \to H^{i+1}(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$. On l'appelle le *morphisme de Bockstein*.
3. Montrer que le morphisme de Bockstein est un morphisme de foncteurs $H^i(-, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \to H^{i+1}(-, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$.
4. Montrer que le morphisme de Bockstein est un dérivateur par rapport à la structure de cup produit. Précisément, soient $x \in H^a(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, $y \in H^b(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, alors

$$\beta(x \cup y) = \beta(x) \cup y + (-1)^a x \cup \beta(y).$$

5. Si $p > 2$, montrer que $\beta \circ \beta = 0$